

The 2023 Zhejiang SCI-TECH University Freshman Programming Contest - Solution

ZSTU ACM Group

Zhejiang SCI-TECH University

2023.11.26

难度预期

Easy: N L A D

Easy - Medium: B M J

Medium - Hard: E F H

Hard: G I K C

A - Locked Calculator

签到题。

考虑到任何数都能用 '1'、'+'、'=' 三个按键打出，所以答案至多为 3，计算 n 各位中出现的不同数的个数与 3 取较小值即为答案。

时间复杂度： $O(1)$

B - おはよう学弟

简单博弈。

考虑当剩余小球数量小于 10 时，下一步操作者必胜，那么对于所有剩余小球数量的状态枚举其下一步的所有情况，不难发现能转移的下一步不会超过 54，直接暴力枚举即可。

时间复杂度： $O(54n)$

C - おはよう学妹

考虑到 10^{18} 内的正整数的不同的质因子个数不超过 15，我们对 k 进行质因数分解后按元素中哪些质因子的个数与 k 中该质因子的个数相同来分别统计数组 a, b 能在哪些质因子位置提供 lcm 的贡献。

D - LR SORT

不难发现构造的排列中越靠后的元素在 LR SORT 时越靠近两侧，
具体的说：

在 n 为奇数时，原排列对应 LR SORT 后所在的位置为

$\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} - 1, \frac{n+1}{2} + 2, \frac{n+1}{2} - 2, \dots, n, 1$ 。

在 n 为偶数时，原排列对应 LR SORT 后所在的位置为

$\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} - 2, \dots, n$ 。

时间复杂度： $O(n)$

E - 我要打 k 个

贪心，优先做 1 操作总是不劣的。

E - 我要打 k 个

贪心，优先做 1 操作总是不劣的。

因为影响到 2 操作只有当前数组的大小，所以先进行 1 操作不会使答案更差，考虑枚举进行 1 操作的次数，每次优先删除当前最小的元素，每次对答案的计算是 $O(1)$ 的。复杂度瓶颈在于对数组元素的排序。

时间复杂度： $O(n \log n)$ 。

F - 舌切雀 (Easy Version)

注意到答案应当严格小于 $\sum_{i=2}^{\sqrt{n}} \lfloor \log_i n \rfloor = 1011538$ ，其中 $\log_i x$ 在 i 变大时收敛的非常快，去除掉其中的重复元素后对于每次询问只要二分答案即可。

时间复杂度： $O(K \ln K + T \log K)$

其中 $K = \sqrt{n}$ 。

G - 舌切雀 (Hard Version)

考虑到一个数可以是很多正整数的次幂，但是我将这个数在他最大次幂表示的被计数，这样就不会重复计数。

比如一个数是最大次幂表示为 x^{12} ，那么它会被

$(x^3)^4, (x^4)^3, (x^2)^6, (x^6)^2$ 重复表示，那么我们就只需要在该次幂的因子方案数计算的时候减去该次幂的方案数。

所以我们可以按次幂从大到小，计算出每个次幂作为最高次幂表示的数的个数，就不会被重复计算，对于 1 则单独考虑。

G - 舌切雀 (Hard Version)

考虑到一个数可以是很多正整数的次幂，但是我将这个数在他最大次幂表示的被计数，这样就不会重复计数。

比如一个数是最大次幂表示为 x^{12} ，那么它会被

$(x^3)^4, (x^4)^3, (x^2)^6, (x^6)^2$ 重复表示，那么我们就只需要在该次幂的因子方案数计算的时候减去该次幂的方案数。

所以我们可以按次幂从大到小，计算出每个次幂作为最高次幂表示的数的个数，就不会被重复计算，对于 1 则单独考虑。

实际是这对应着容斥系数只可能为 -1 或莫比乌斯函数。

时间复杂度： $O(T \log^2 n)$

G - 舌切雀 (Hard Version)

第二种做法，考虑进一步优化 F 的暴力方案。

G - 舌切雀 (Hard Version)

第二种做法，考虑进一步优化 F 的暴力方案。

我们首先可以暴力打出所有小于 n 的能被表示为 x^k

$(2 \leq x \leq \sqrt[3]{n}, k > 2)$ 的数，总数应严格小于

$$\sum_{i=2}^{\sqrt[3]{n}} \lfloor \log_i n \rfloor = 1037552。$$

于是相似的，我们可以二分找到所有能被表示为 $x^k, k > 2$ 的数，我们将其作为答案的第一部分。

G - 舌切雀 (Hard Version)

之后我们考虑如何加上剩下的能被表示为 $(x_1)^2$ 且不能被表示为 $(x_2)^k, k > 2$ 的数。

易知总共有 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个数能被表示为 $(x_1)^2$ ，我们将其作为答案的第二部分。

G - 舌切雀 (Hard Version)

之后我们考虑如何加上剩下的能被表示为 $(x_1)^2$ 且不能被表示为 $(x_2)^k, k > 2$ 的数。

易知总共有 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个数能被表示为 $(x_1)^2$ ，我们将其作为答案的第二部分。

考虑容斥，这两部分被重复算的部分就是第一部分中能被表示为 $(x_3)^2$ 的数，其中 x_3 是能被表示为 $x^k, k > 1$ 的数，我们将其作为答案的第三部分。

G - 舌切雀 (Hard Version)

考虑如何计算第三部分, 已知 $x_3 \leq \sqrt{n}$, 所以我们只要利用与 F 中相同的办法来得到所有能被表示为 x^k ($2 \leq x \leq \sqrt{x_3}, k > 1$) 的数, 然后二分计算即可。

G - 舌切雀 (Hard Version)

考虑如何计算第三部分, 已知 $x_3 \leq \sqrt{n}$, 所以我们只要利用与 F 中相同的办法来得到所有能被表示为 x^k ($2 \leq x \leq \sqrt{x_3}, k > 1$) 的数, 然后二分计算即可。

答案即为第一部分加上第二部分再减去第三部分。

时间复杂度: $O(K_1 \ln K_1 + K_2 \ln K_2 + T(\log K_1 + \log K_2))$ 。

其中 $K_1 = \sqrt[3]{n}, K_2 = \sqrt[4]{n}$ 。

H - Sterling

首先对于串 s ，它的长度应当不小于串 t ；其次，它的头尾是不可能被删除的。

然后我们考虑使用 s 串来匹配 t 串中的每个字符，并尽可能使相邻的位置差为偶，也即被删除的子串长度为偶。

特别的，当串 t 的长度为 1 时，只有 $s = t$ 时才是合法的，因为无法对长度为 3 的串进行操作。

时间复杂度: $O(n)$

$$I - A = B$$

分讨构造题。

当 $x = y$ 时，保证 $MAXN$ 大于 $\max(|x|, |y|)$ 即可。

考虑如何构造 unsigned 的方案，则 $MAXN$ 应为 $|x - y| - 1$ ，当满足 $0 \leq y \leq MAXN$ 时该方案合法。

考虑如何构造 signed 的方案，则 $MAXN$ 应为 $\frac{|x-y|}{2} - 1$ ，当满足 $|x - y| \bmod 2 = 0$ 且 $(-MAXN - 1) \leq y \leq MAXN$ 时该方案合法。

时间复杂度： $O(T)$

J - Devil's Recitation 1

首先，对于小洞所在的列，在该列放下的小球一定会进洞；除此之外，只有在所在行的最左，最右，次左，次右四个位置的小洞会影响到其他小球。

对于位于最左和次左的小洞，所在列比它小的小球会进入小洞；

对于位于最右和次右的小洞，所在列比它大的小球会进入小洞。

维护出唯一的可能的不进洞的列区间后考虑每一列上有无小洞即可。

时间复杂度： $O(n)$

K - Devil's Recitation 2

考虑到只需要 $6n + 2m$ 个矩形就能还原出所有小球下落的过程，
它们分别是：

K - Devil's Recitation 2

考虑到只需要 $6n + 2m$ 个矩形就能还原出所有小球下落的过程，
它们分别是：

$2n - 1$ 个小球下落点。

$2(n - 1)$ 个边缘点（每行最左侧和最右侧）和对应移动方向的下一个点，这里共有 $4(n - 1)$ 个点。

m 个有传送带的点和对应移动方向的下一个点，这里共有 $2m$ 个点。

1 个位于最后一行的终点。

K - Devil's Recitation 2

考虑到只需要 $6n + 2m$ 个矩形就能还原出所有小球下落的过程, 它们分别是:

$2n - 1$ 个小球下落点。

$2(n-1)$ 个边缘点（每行最左侧和最右侧）和对应移动方向的下一个点，这里共有 $4(n-1)$ 个点。

m 个有传送带的点和对应移动方向的下一个点, 这里共有 $2m$ 个点。

1 个位于最后一行的终点。

其中除了终点以外的所有点都有唯一的下一个移动后的位置(点), 也即出度为 1。

K - Devil's Recitation 2

我们可以按照这个规则建出一张有向图，对于会左右移动的位置直接连边，对于下落的点在对应列上二分或排序后使用指针维护下一个位置来连边。

K - Devil's Recitation 2

我们可以按照这个规则建出一张有向图，对于会左右移动的位置直接连边，对于下落的点在对应列上二分或排序后使用指针维护下一个位置来连边。

后面算答案的方法多种多样：

可以考虑在建图时直接建反图从终点跑 DFS ；

也可以考虑唯一无法到终点的情况就是相邻传送带或边缘点的移动方向相反，这对应着二元环的情况；所以有环的联通块中的下落点到不了出口；

还可以用类似 DP 的角度来考虑，用 0/1 代表在点所在块能否到达终点，记忆化搜索即可。

复杂度都是 $O((6n + 2m) \log(6n + 2m))$

L - 兀突骨之死

签到题，维护兀突骨当前的血量和结束时收到的“燃殇”伤害值来计算死亡时间即可。

复杂度: $O(n)$

M - 渚千夏的串

考虑到对于 01 串，每个 0 对子序列 01 个数的贡献等同于其之后 1 的个数。

不妨先建出一个长为 $\lceil \sqrt{m} \rceil$ 的全 1 串，则在其中插入至多 $\lceil \sqrt{m} \rceil$ 个 0 可以构造出任意总贡献 $0 \leq w \leq (\lceil \sqrt{m} \rceil)^2$ 的串，从原串头开始对每个位置尝试能否插入即可。

复杂度: $O(\sqrt{m})$

N - 桂林精八件

签到题，维护每种物品的个数来计算答案即可。

复杂度: $O(n)$

END

END